

З а м е ч а н и е 3. В силу следствия 2 на поверхности, в любой точке которой выполняется условие $\tilde{e}_{11}^{\omega_0} = \tilde{e}_{22}^{\omega_0}$, однозначное построение сети по псевдофокусам \tilde{F}_ω и \tilde{F}_{ω_0} оснащающей нормали невозможно.

б) На каждой из нормалей $[A, \tilde{e}_\omega]$ выберем по произвольной точке \tilde{F}_ω^1 с координатами λ_ω^1 соответственно. Тогда из (5) в общем случае получим две пары функций: μ_i и $\tilde{\mu}_i$, определяющие по условию (4) взаимные [1] сети Σ_2^* и $\tilde{\Sigma}_2^*$. Можно показать, что для однозначного определения сети $\Sigma_2^*(\tilde{\Sigma}_2^*)$ достаточно, кроме задания точек \tilde{F}_ω^1 на каждой из нормалей, выбрать на одной из них дополнительно точку $\tilde{F}_{\omega_0}^2(\tilde{F}_{\omega_0}^1)$, являющуюся псевдофокусом соответствующей нормали относительно сети $\Sigma_2^*(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2)$ ($\tilde{\Sigma}_2^*(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2)$) при смещении точки A в направлении $\tilde{e}_1(\tilde{e}_2)$, где $\tilde{e}_i(\tilde{e}_2)$ -векторные поля, определяющие искомую сеть $\Sigma_2^*(\tilde{\Sigma}_2^*)$.

3. Очевидно, что, накладывая соответствующие условия на функции μ_i , определяющие сеть Σ_2^* , можно за счет специального выбора координат точек - псевдофокусов нормалей любой из представленных здесь способов использовать для построения сети с определенными заданными свойствами (ортогональной, асимптотической, сопряженной, сети линий кривизны относительно одной из нормалей и т.д.). Причем способ построения взаимных сетей существенно отличается от других, если обе сети одновременно обладают одним и тем же свойством.

Из рассмотренного выше ясно, что свойства сети на поверхности тесно связаны с расположением псевдофокусов нормалей относительно этой сети. В частности, например, можно отметить:

У т в е р ж д е н и е 1. Для ортогональной сети Σ_2^* следующие условия эквивалентны: 1) псевдофокусы оснащающей нормали относительно сети Σ_2^* совпадают; 2) сети Σ_2^* и Σ_2 биссекторны; 3) точка $A \in V_2$, псевдофокусы сети Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали и любой из псевдофокусов сети Σ_2^* образуют гармоническую четверку точек оснащающей нормали; 4) псевдофокусы $\tilde{F}_{\omega_0}^1, \tilde{F}_{\omega_0}^2, \tilde{F}_{\omega_0}^{12}$ сетей Σ_2^*, Σ_2 и сети $\Sigma_2^*(\tilde{e}_1, \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2)$ (\tilde{e}_i -векторные поля, задающие сеть Σ_2^*) и точка $A \in V_2$ образуют гармоническую четверку точек оснащающей нормали.

У т в е р ж д е н и е 2. Если сеть Σ_2^* и сеть Σ_2 линий кривизны относительно оснащающей нормали биссекторны, то в окрестности точки $A \in V_2 \subset E_4$, в которой $\tilde{e}_{11}^{\omega_0} \neq \tilde{e}_{22}^{\omega_0}$, следующие условия эквивалентны: 1) сеть Σ_2 является сетью линий кривизны; 2) псевдофокусы дополнительной нормали относительно сети Σ_2^* совпадают; 3) существует сеть, относительно которой псевдофокусы оснащающей и дополнительной нормалей совпадают одновременно; 4) точка $A \in V_2$, псевдофокусы

сети Σ_2 и любой из псевдофокусов сети Σ_2^* образуют гармоническую четверку точек дополнительной нормали; 5) псевдофокусы $\tilde{F}_\omega^1, \tilde{F}_\omega^2, \tilde{F}_\omega^{12}$ ($\omega \neq \omega_0$) сетей $\Sigma_2^*, \Sigma_2, \Sigma_2^*$ и точка $A \in V_2$ образуют гармоническую четверку точек дополнительной нормали.

Библиографический список

1. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве// Литов.матем.сб. 1966. Т.6. №4. С.475-491.

2. Базылев В.Т. Об одном свойстве геодезических линий на многомерных поверхностях// Запросы дифференциальной геометрии: Уч.зап./ МГПИ им. В.И.Ленина.М., 1970. Т.1. №374. С.52-56.

3. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия.М.:ГИИЛ.1948.

УДК 514.75

АФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ, АССОЦИРОВАННАЯ С \mathcal{H} -РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

М.Ф. Гребенюк
(Киевское авиационное училище)

Настоящая работа относится к дифференциальной геометрии составных распределений многомерного аффинного пространства A_{n+1} . Рассматривается трехсоставное распределение $H(M(A))$ [1], [2], которое будем называть \mathcal{H} -распределением. Получена аффинная связность Γ , внутренне определенная самим \mathcal{H} -распределением. Показано, что связность

Γ относится к классу аффинных связностей, определенных путем проектирования, если за направление проектирования принять оснащающую плоскость $\mathcal{N}_{n+1}(A)$. Работа является продолжением работ [1], [2].

1. Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n+1, \tau}$, $(n+1)$ -мерной базой которого является аффинное пространство A_{n+1} , а слоями - (τ -мерные центроаффинные пространства) - плоскости H_τ соответствующих τ -мерных элементов базисного Λ -распределения данного \mathcal{H} -распределения.

Аффинную связность Γ пространства $A_{n+1, \tau}$ всегда можно определить при помощи системы форм $\{\theta^p, \theta_q^p\}$ [4], [5]: $\theta^p = \omega^p - \Gamma_{\alpha k}^p \omega^k$, $\theta_q^p = \omega_q^p - \Gamma_{qk}^p \omega^k$, удовлетворяющих структурным уравнениям: $d\theta^p = \theta^q \wedge \theta_q^p + \omega^\lambda \wedge \Delta \Gamma_{\alpha k}^p$, $\Delta \theta_q^p = \theta_q^\lambda \wedge \theta_\lambda^p + \omega^\lambda \wedge \Delta \Gamma_{qk}^p$, где $\Delta \Gamma_{\alpha k}^p = \nabla \Gamma_{\alpha k}^p + \delta_{\alpha k}^{n+1} \omega_{n+1}^p - \Gamma_{qk}^p \omega_q^p - \Gamma_{\alpha k}^q \omega_q^p - \Delta \omega_{\alpha k}^p$, $\Delta \Gamma_{qk}^p = \nabla \Gamma_{qk}^p + \Lambda_{qk}^p \omega_{n+1}^p + (\Lambda_{qk}^p \Lambda_{\alpha j}^p - \Gamma_{qk}^p \Gamma_{\alpha j}^p) \omega_j^p$.

Формы $\Delta \Gamma_{\alpha k}^p$, $\Delta \Gamma_{qk}^p$, ω^λ на \mathcal{H} -распределении образуют вполне интегрируемую систему и определяют над исходной базой (ω_α^k) поле геометрического объекта $\{\Gamma_{\alpha k}^p, \Gamma_{qk}^p\}$. Для того, чтобы формы θ^p, θ_q^p определя-

ли аффинную связность в слоях (плоскостях H_x) пространства аффинной связности $A_{n+1, \tau}$, необходимо и достаточно, чтобы было задано поле объекта связности $\{\Gamma_{ox}^p, \Gamma_{qx}^p\}$, т.е. чтобы выполнялись дифференциальные уравнения [31, 44]:

$$\Delta \Gamma_{ox}^p = \Gamma_{oxx}^p \omega^x, \quad \Delta \Gamma_{qx}^p = \Gamma_{qxx}^p \omega^x. \quad (1)$$

Структурные уравнения для форм θ^p, θ_q^p имеют вид:

$$D\theta^p = \theta_q^p \theta_q^p + \frac{1}{2} R_{oxx}^p \omega^x \wedge \omega^x, \quad D\theta_q^p = \theta_q^x \theta_x^p + \frac{1}{2} R_{qxx}^p \omega^x \wedge \omega^x,$$

где тензор $\{R_{oxx}^p, R_{qxx}^p\}$ является тензором кручения-кривизны аффинной связности Γ пространства $A_{n+1, \tau}$ и $R_{oxx}^p = 2\Gamma_{oxxx}^p, R_{qxx}^p = 2\Gamma_{qxxx}^p$.

2. Пусть Λ -распределение оснащено, т.е. в каждом центре Λ элемента \mathcal{K} -распределения внутренним инвариантным образом присоединена оснащающая плоскость $\mathcal{H}_{n+1-\tau}(A)$, проходящая через центр \mathcal{K} -распределения, где $\mathcal{H}_{n+1-\tau}(A) = [\vec{\mathcal{K}}_u, \vec{\mathcal{K}}_{n+1}]$, $\vec{\mathcal{K}}_{n+1} = \vec{e}_{n+1} + H_{n+1}^p \vec{e}_p$, $\vec{\mathcal{K}}_u = \vec{e}_u + H_u^p \vec{e}_p$. Из условия инвариантности плоскости $\mathcal{H}_{n+1-\tau}(A)$ приходим к уравнениям:

$$v_g H_{n+1}^p + \pi_{n+1}^p - H_{n+1}^p \pi_{n+1}^{n+1} - H_v^p \pi_{n+1}^v = 0, \quad v_g H_u^p = 0. \quad (2)$$

В дифференциальных окрестностях первого и второго порядков строим объекты

$$a_{pq}^u = \frac{1}{2} (\Lambda_{pq}^u + \Lambda_{qp}^u),$$

$$\nabla a_{pq}^u + a_{pq}^u \omega_{n+1}^u = a_{pq}^u \omega^x,$$

$$a^u = \frac{1}{2} a^{pq} a_{pq}^u,$$

$$\nabla a^u - a^u \omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^u = a_x^u \omega^x,$$

$$f_u^{pq} = A_{ux}^p a^{qz} - \hat{a}_u a^{pq},$$

$$\nabla f_u^{pq} - f_u^{pq} \omega_{n+1}^{n+1} = f_{ux}^{pq} \omega^x,$$

$$f_{pq} = a^{st} a^{rz} B_{srp} B_{tzq},$$

$$\nabla f_{pq} = f_{pqx} \omega^x,$$

$$f_{pq} e^{qr} = \delta_p^r,$$

$$\nabla f_{pq} = f_x^{qr} \omega^x,$$

$$f_p = B_{pqz} f_{qz}^s,$$

$$\nabla f_p = -f_p \omega_{n+1}^{n+1} + f_{px} \omega^x.$$

Уравнения (2) выполняются, если положить

$$H_{n+1}^p = a^u f_u^{pq} \ell_q + \gamma^p, \quad H_u^p = -f_u^{pq} \ell_q, \quad (3)$$

где квазитензор $\{\gamma^p\}$ определяет инвариантную нормаль первого рода \mathcal{K} -распределения. Таким образом, инвариантная оснащающая плоскость $\mathcal{H}_{n+1-\tau}(A)$ определена векторами $\vec{\mathcal{K}}_{n+1} = \vec{e}_{n+1} + (a^u f_u^{pq} \ell_q + \gamma^p) \vec{e}_p$, $\vec{\mathcal{K}}_u = \vec{e}_u - f_u^{pq} \ell_q \vec{e}_p$. Порядок дифференциальной окрестности, в которой определена плоскость $\mathcal{H}_{n+1-\tau}(A)$, зависит от порядка квазитензора $\{\gamma^p\}$, но он всегда выше второго порядка.

3. Нетрудно проверить, что уравнения (1) удовлетворяются, если охваты компонент объекта аффинной связности $\Gamma = \{\Gamma_{ox}^p, \Gamma_{qx}^p\}$ осуществить следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{ox}^p = 0, \quad \Gamma_{ou}^p = -f_u^{pq} \ell_q, \quad \Gamma_{on+1}^p = a^u f_u^{pq} \ell_q + \gamma^p, \\ \Gamma_{qx}^p = \Lambda_{qx} (a^u f_u^{pt} \ell_t + \gamma^p) - \Lambda_{qx}^u f_u^{pt} \ell_t. \end{array} \right. \quad (4)$$

Таким образом, доказано, что слоевые формы θ^p, θ_q^p пространства аффинной связности $A_{n+1, \tau}$, внутренне определенного на \mathcal{K} -распределении и ассоциированного с Λ -распределением, имеют вид:

$$\theta^p = \omega^p + f_u^{pq} \ell_q \omega^u - (a^u f_u^{pq} \ell_q + \gamma^p) \omega^{n+1},$$

$$\theta_q^p = \omega_q^p - (\Lambda_{qx} a^u f_u^{pt} \ell_t + \Lambda_{qx}^u f_u^{pt} \ell_t + \Lambda_{qx}^u f_u^{pt} \ell_t) \omega^x.$$

4. Следуя работе [5], можно показать, что построенная аффинная связность Γ относится к классу аффинных связностей, определенных путем проектирования. Действительно, при определяющем связность отображении

$$\vec{A}(u+du) \rightarrow \vec{A}(u, du), \quad \vec{e}_x(u+du) \rightarrow \vec{e}_x(u, du) \quad (5)$$

образом текущей плоскости Λ -распределения $[\vec{A}(u+du), \vec{e}_p(u+du)] = H_x(u+du)$ является плоскость $H_x(u, du) = [\vec{A}(u, du), \vec{e}_p(u, du)]$:

$$\vec{A}(u, du) = \vec{A}(u) + \omega^x \vec{e}_y(u) + [2], \quad \vec{e}_p(u, du) = \vec{e}_p(u) + \omega_p^x \vec{e}_y(u) + [2].$$

Спроектируем на текущую плоскость Λ -распределения $H_x(u) = [\vec{A}(u), \vec{e}_p(u)]$ образ $H_x(u, du) = [\vec{A}(u, du), \vec{e}_p(u, du)]$ соседней плоскости $H_x(u+du) = [\vec{A}(u+du), \vec{e}_p(u+du)]$ параллельно оснащающей плоскости $\mathcal{H}_{n+1-\tau}(A)$. Эта проекция определяет отображение:

$$\begin{aligned} \vec{A}(u, du) &\rightarrow \vec{A}(u, du) = \vec{A}(u, du) + \ell^{n+1} \vec{\mathcal{K}}_{n+1} + \ell^u \vec{\mathcal{K}}_u = \\ &= \vec{A}(u) + (\omega^p + \ell^{n+1} H_{n+1}^p + \ell^u H_u^p) \vec{e}_p + (\omega^u + \ell^u) \vec{e}_u + (\omega^{n+1} + \ell^{n+1}) \vec{e}_{n+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_p(u, du) \rightarrow \vec{\tilde{e}}_p(u, du) = \vec{e}_p(u, du) + \ell_p^{n+1} \vec{K}_{n+1} + \ell_p^n \vec{K}_n = \\ = \vec{e}_p(u + (\omega_p^q + \ell_p^{n+1} H_{n+1}^q + \ell_p^n H_n^q)) \vec{e}_q + (\omega_p^u + \ell_p^u) \vec{e}_u + (\omega_p^{n+1} + \ell_p^{n+1}) \vec{e}_{n+1}. \quad (7) \end{aligned}$$

Коэффициенты ℓ^{n+1} , ℓ^u , ℓ_p^{n+1} , ℓ_p^n определим из условия: проекции $\vec{A}(u, du)$, $\vec{\tilde{e}}_p(u, du)$ векторов $\vec{A}(u, du)$, $\vec{e}_p(u, du)$ должны располагаться в плоскости $H_u(u) = [\vec{A}(u), \vec{e}_p(u)]$, т.е. в разложениях (6) и (7) должны отсутствовать члены с \vec{e}_u и \vec{e}_{n+1} . В результате получаем, что $\ell^u = -\omega_p^u$, $\ell^{n+1} = -\omega_p^{n+1}$, $\ell_p^n = -\omega_p^n$, $\ell_p^{n+1} = -\omega_p^{n+1}$. Суперпозиция отображений (5) и (6)-(7) задает отображение, определяющее аффинную связность на \mathcal{H} -распределении, определенную путем проектирования: $\vec{A}(u, du) \rightarrow \vec{\tilde{e}}_p(u, du) = \vec{A}(u) + \theta^p \vec{e}_p$, $\vec{e}_p(u, du) \rightarrow \vec{e}_p(u, du) = \vec{e}_p(u) + \theta_p^q \vec{e}_q$. Здесь формы θ^p , θ_p^q : $\theta^p = \omega^p - H_{n+1}^p \omega^{n+1} - H_u^p \omega^u$, $\theta_p^q = \omega_p^q - H_{n+1}^q \omega_q^{n+1} - H_v^q \omega_v^q$ определяют главную часть полученного отображения и являются формами аффинной связности Γ на \mathcal{H} -распределении, определенной путем проектирования. Объект этой связности определяется формулами (4).

Библиографический список

1. Гребенюк М.Ф. Поля геометрических объектов трехсоставного распределения аффинного пространства A_{n+1} // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр.ун-т. Калининград. Вып. 18. 1987. С. 21-24.

2. Гребенюк М.Ф. К геометрии $H(M(\Lambda))$ -распределений аффинного пространства/ Калинингр.ун-т. Калининград, 1988. 17с. Деп. в ВИНИТИ И.Н.88. № 8204-88.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий// Тр. Моск.матем.о-ва. ГИТЛ.М., 1953. Т.2. С.275-382.

4. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства// Тр. IV Всес.матем.съезда, 1961.Л.:Наука, 1964. Т.2.

5. Лаптев Г.Ф., Остинану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I// Тр. геом. семинара/ ВИНИТИ.М., 1971. Т.3. С. 49-94.

УДК 514.75

О ПАРЕ ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Т.А.Д у л а л а е в а

(Елабужский педагогический институт)

В работе продолжается построение дифференциальной геометрии пары гиперраспределений в n -мерном проективном пространстве. Рассматривает-

ся частный случай, когда все фокусы прямой (AA_n) совпадают.

В проективном пространстве P_n заданы: 1) две диффеоморфные области Ω и $\bar{\Omega}$, 2) $(n-1)$ -распределения Δ в области Ω и $\bar{\Delta}$ в области $\bar{\Omega}$, 3) диффеоморфизм $f: \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$ такой, что $\forall A \in \Omega, f(A) \notin \Delta(A)$, $\forall B \in \bar{\Omega}, f^{-1}(B) \notin \bar{\Delta}(B)$. Тогда в пространстве P_n определена пара гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$. Присоединим к паре областей Ω и $\bar{\Omega}$ подвижные проективные реперы $\mathcal{R}^A = (A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n)$ и $\bar{\mathcal{R}}^{\bar{A}} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_{n-1}, \bar{A}_n)$, где $A_i \in \Omega$, $\bar{A}_i \in \bar{\Omega}$, $A_i \in \Delta(A) \cap \bar{\Delta}(\bar{A}_i)$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, n-1$). Система дифференциальных уравнений, определяющих пару гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$, имеет вид:

$$\omega_i^k = L_{i\alpha} \omega^\alpha, \theta_i^k = \bar{L}_{i\alpha} \theta^\alpha, \theta^\alpha = \Lambda_\beta^\alpha \omega^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n). \quad (I)$$

Линия ℓ , как и линия $f(\ell)$, называется двойной линией пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$, если она является линией пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ и одновременно двойной линией отображения f . Ясно, что точка пересечения касательных соответствующих двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ принадлежит пересечению $\Delta(A) \cap \bar{\Delta}(\bar{A}_n)$. Необходимым и достаточным условием существования двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$ является совпадение фокусов $F^i = \bar{F}^i$ прямой (AA_n) [2].

I. Пусть гиперраспределения Δ , $\bar{\Delta}$ являются соответствующими в индуцированном отображении f_* . Тогда возможны, по крайней мере, $n-1$ различных двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$. Поместим вершины A_i репера \mathcal{R}^A в точки пересечения касательных соответствующих двойных линий пары гиперраспределений $(\Delta, \bar{\Delta})$. Будем иметь

$$\Lambda_i^k = 0, \quad \Lambda_i^j = 0 \quad (i \neq j). \quad (2)$$

При этом $F^i = \bar{F}^i = -\Lambda_i^i A + A_n$.

Рассмотрим случай, когда все фокусы прямой (AA_n) совпадают

$$\Lambda_1^1 = \Lambda_2^2 = \dots = \Lambda_{n-1}^{n-1}, \quad (3)$$

т.е. $F^1 = F^2 = \dots = F^{n-1} = -\Lambda_1^1 A + A_n$. Имеют место следующие соотношения:

$$\Lambda_{jk}^i + \Lambda_n^i \Lambda_{jk} = 0, \quad \Lambda_{jn}^i + \Lambda_n^i \Lambda_{jn} = 0, \quad \Lambda_{ia}^i + \Lambda_n^i \Lambda_{ia} = \Lambda_{ja}^j + \Lambda_n^j \Lambda_{ja},$$

$$\Lambda_{ij}^n = (\Lambda_1^i)^2 \bar{L}_{ij} - \Lambda_n^i \Lambda_{ij}, \quad \Lambda_{in}^n = \Lambda_1^i \bar{L}_{ij} \Lambda_n^j - \Lambda_n^i \Lambda_{in} \quad (i \neq j, \text{ нет суммирования}).$$

Учитывая, что $\Lambda_{jk}^i = \Lambda_{kj}^i$ и $\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ji}^n$, получим

$$\bar{L}_{jk} = \Lambda_{kj}^i, \quad (\Lambda_1^i)^2 \bar{L}_{ij} = \Lambda_n^n \Lambda_{ij}, \quad (4)$$

где $\bar{L}_{ij} = \frac{1}{2} (L_{ij} - L_{ji})$, $\bar{L}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{L}_{ij} - \bar{L}_{ji})$ – тензоры неголономности гиперраспределений Δ и $\bar{\Delta}$ соответственно. Справедлива

Теорема 1. Если фокусы прямой (AA_n) совпадают, то гиперраспределения Δ , $\bar{\Delta}$ голономны.